

First Order Logic (FOL) – 2

6.2.5 Herbrand Universe

Merupakan sebuah latihan yang baik untuk dapat mendeterminasi apakah sebuah formula bernilai benar / valid pada sebuah struktur bahasa L, dan apakah terdapat sebuah model untuknya. Langkah awal yang baik untuk hal ini, adalah dengan menggunakan Herbrand Universe. Ambillah beberapa konstanta dalam formula $\{F_0, \dots, F_n\}$. Ambil juga $\{F_1, \dots, F_m\}$ adalah fungsi yang terdapat di dalam formula. Maka himpunan term (konstanta) yang diperoleh mulai dari konstanta yang tersedia dengan menggunakan fungsi yang terdefinisi dalam formula, akan disebut dengan Herbrand Universe untuk formula-formula tersebut.

Sebagai contoh, diberikan formula $(P \times A) \text{ OR } (Q \ y)$, maka Herbrand Universe yang terbentuk adalah $\{A\}$, karena hanya A yang tidak memiliki konstanta untuk mengisinya, karena tidak memiliki variabel pengikat. Diberikan formula $(P \times (F \ y)) \text{ OR } (Q \ A)$, maka Herbrand Universe yang terbentuk adalah $\{A (F \ A) (F \ F(A)) (F \ F(F(A))) \dots\}$. Tanda "...", menggambarkan bahwa masih ada kemungkinan terbentuk Herbrand Universe melalui rekursif fungsi untuk formula F, atau substitusi konstanta dengan Q.

Reduksi ke dalam Bentuk Klausula

Pada bagian berikut ini, akan diperkenalkan algoritma untuk menurunkan dari sebuah, sebuah klausa yang ekuivalen, melalui serangkaian transformasi dengan mempertahankan kondisi kebenaran.

Dapat dikatakan bahwa sebuah teorema (yang masih belum terbukti kebenarannya), sebagai sebuah formula yang ekuivalen terhadap sebuah bentuk klausa. Oleh sebab itu untuk membuktikan bahwa jika ingin membuktikan kebenaran sebuah teorema, hanya perlu membatasi perhatian pada klausa yang berlaku dalam sebuah universe saja.

6.2.6 Deduksi

Sebuah aturan inferensi adalah sebuah aturan untuk menghasilkan formula baru (bagian konsekuensi dari sebuah implikasi), melalui sebuah himpunan formula (bagian premis).

Aturan inferensi yang paling umum digunakan adalah Modus Ponens:

$$\frac{\{A, \text{ NOT } A \text{ OR } B\}}{\text{-----}} \\ B$$

For example:

$$\frac{\{\text{Sam is tall,} \\ \text{if Sam is tall then Sam is unhappy}\}}{\text{-----}} \\ \text{Sam is unhappy}$$

Ketika sebuah aturan penalaran diperkenalkan, harus merupakan aturan yang bernilai kebenaran dan dapat diterima (Sound), atau dengan kata lain penalaran yang dihasilkan merupakan konsekuensi logis dari premis yang diberikan. Modus ponens adalah contoh penalaran yang Sound.

Ada penalaran yang tidak sound, contohnya Abduction, yaitu:

$$\frac{\{B, \text{ NOT } A \text{ OR } B\}}{\text{A}}$$

Sebagai contoh:

John is wet

If it is raining then John is wet

It is raining

Contoh di atas memberikan keadaan yang “biasanya” benar, namun tidak selalu benar bahwa John hanya basah pada saat hari hujan, bisa saja misalnya pada saat dia mandi.

Sebuah sistem logika atau sistem deduksi, adalah sebuah bahasa ditambahkan dengan seperangkat aturan inferensi, ditambah dengan seperangkat aksioma, yaitu formula yang valid.

Sebuah hasil deduksi atau pembuktian atau penurunan dalam sebuah sistem deduksi D, diberikan seperangkat formula GAMMA, adalah sebuah keterurutan formula B_1, B_2, \dots, B_n , yang:

1. Untuk semua i dari 1 sampai n , B_i adalah aksioma untuk D atau elemen dari GAMMA, atau diperoleh sebagai himpunan bagian dari $\{B_1, \dots, B_n\}$ dengan menggunakan aturan inferensi di dalam D.

Dalam kasus seperti ini, dikatakan bahwa B_n diturunkan dengan GAMMA di dalam D, dan pada saat GAMMA tidak berisi formula apapun lagi, maka dapat dikatakan bahwa B_n adalah sebuah teorema di dalam D, atau dengan kata lain B_n kontradiksi dengan semua fungsi di dalam GAMMA.

6.2.7 Soundness, Completeness, Consistency, Satisfiability

Sebuah sistem deduksi D disebut dengan Sound, jika semua himpunan formula dalam GAMMA, dan sebuah formula A:

2. Jika A dapat diturunkan dari GAMMA di dalam D, maka A adalah konsekuensi logis dari GAMMA.

Sebuah sistem deduksi D disebut dengan Complete, jika untuk semua formula dalam GAMMA, dan sebuah formula A:

3. Jika A adalah konsekuensi logis dari GAMMA, maka A dapat diturunkan dari GAMMA di dalam D.

Sebuah sistem deduksi D disebut dengan Refutation Complete, jika untuk semua formula dari GAMMA, dan sebuah formula A:

4. Jika A adalah konsekuensi logis dari GAMMA, maka gabungan (union) dari GAMMA dan $(\neg A)$ adalah inkonsisten (saling bertentangan).

Perhatikan bahwa jika sebuah sistem deduksi menghasilkan Refutation Complete, maka akan dapat disusun semua konsekuensi logis dari GAMMA, dan untuk semua formula A, dapat direduksi untuk menjawab bahwa jika A adalah atau bukan sebuah konsekuensi logis dari GAMMA, dengan pertanyaan: apakah gabungan GAMMA dan $\neg A$ konsisten atau tidak.

Logika yang dapat diterima, berarti adalah yang Sound dan Complete, atau paling tidak Sound dan Refutation Complete.

Sebuah teori T, berisi sebuah sistem deduksi, dan seperangkat aksioma non-logikal. Untuk lebih meyakinkan, dapat dikatakan untuk menghindari ambiguitas, bahwa untuk logikal dari T atau non-logikalnya, cukup sebagai T.

Dalam situasi umumnya, kita memiliki di alam pikir kita, keadaan "dunia" atau himpunan dunia yang sudah terpatrit. Sebagai contoh mungkin kita sudah mengetahui tentang bilangan asli dan operasi aritmatik serta relasi di dalamnya. Atau kita dapat mengetahui pula tentang dunia BLOK (lihat pembahasan sebelumnya). Memang perlu diperkenalkan fungsi dan simbol predikat lainnya yang berlaku dalam semesta pembicaraan tersebut. Maka perlu diperkenalkan formula, disebut sebagai Aksioma Non-Logikal (mutlak), yang akan memberikan nilai kebenaran tertentu dalam semesta pembicaraan itu. Kita dapat melakukan penalaran logis, dengan harapan mencapai keadaan dapat diterima (Sound), dan (Refutation) Complete, untuk dapat menghasilkan fakta baru tentang dunia dari hal-hal yang mutlak tersebut.

Sebuah teorema di dalam teori T adalah sebuah formula A yang dapat diturunkan dengan logika T melalui penalaran dari aksioma non-logikal.

Sebuah teori disebut konsisten jika tidak ada formula A, sehingga keduanya A dan $\neg A$ adalah teorema di dalam T. Jika kebalikannya terjadi disebut dengan inkonsisten. Jika sebuah teori T adalah inkonsisten, maka, untuk setiap bentuk logika, setiap formula di dalamnya adalah teorema di dalam T. Hal ini terjadi karena, di dalam T, terdapat formula A dan $\neg A$, yang merupakan teorema di dalam T. Sulit dibayangkan sebuah kebenaran logika, yang jika terdapat A dan $\neg A$, yang hasil penalarannya tidak bernilai FALSE, dan dengan nilai FALSE ini tidak dapat diturunkan formula / fakta baru. Jika ada logika yang seperti ini maka sistem inferensi tersebut akan disebut dengan Adequate.

Sebuah teori disebut Unsatisfiable, jika tidak tersedia satupun struktur dari kebenaran mutlak dalam dunia (aksioma non-logikal) untuk memenuhi validitas formula dalam T. Jika tersedia satu saja kebenaran yang dapat memenuhi tuntutan formula, maka akan disebut Satisfiable.

Diberikan sebuah teori T , sebuah formula A adalah konsekuensi logis di dalam T , jika formula itu adalah konsekuensi logis dari aksioma non-logikal di dalam T .

Dengan demikian, jika sistem deduksi yang kita gunakan dapat diterima kebenarannya (Sound), maka:

1. Jika sebuah teori T satisfiable, maka T adalah konsisten.
2. Jika sistem logika yang digunakan adalah adequate, maka jika T adalah konsisten, maka T juga akan satisfiable.
3. Jika sebuah teori T satisfiable dan dengan menambahkan ke dalam T aksioma non-logikal ($\neg A$), akan diperoleh sebuah teori yang tidak satisfiable, maka A adalah sebuah konsekuensi logis dari T .
4. Jika sebuah teori T satisfiable dan dengan menambahkan formula ($\neg A$) ke dalam T , diperoleh teori yang inkonsisten, maka A adalah konsekuensi logis dari T .